МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

ГРИГОРЧУК Ростислав Иванович

БАНАХОВЫ СРЕДНИЕ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент А.М.СТЕПИН

Москва - 1978

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об асимптотическом поведении композиций мер на однородных пространствах возникают в прикладных и теоретических вопросах функционального анализа и теории вероятностей.

В том случае когда однородное пространство есть группа действующая на себе сдвигами, мы попадаем в рамки теории случайных блужданий, сильно продвинутой для конечно порожденных абелевых групп и гораздо менее разработанной в том случае, когда группа является "сильно" некоммутативной.

Одним из наиболее значительных результатов, относящихся к распределениям на произвольной группе, можно считать теорему Г.Кестена [3] , утверждающую, что группа G обладает инвариантным банаховым средним тогда и только тогда, когда спектральный радиус r любого симметрического случайного блуждания на ней равен I.

Интерес к группам, допускающим инвариантное банахово среднее (такие группы называются аменабельными) вызван многочисленными и в ряде случаев неожиданными приложениями, которые они находят в разных областях анализа. Достаточно указать на свойство аменабельных групп иметь неподвижную точку при аффинном действии на выпуклом компакте или на свойство слабого включения тривиального представления в регулярное. Представляет интерес отыскание эффективных критериев аменабельности групп, заданных копредставлением, т.е. набором образующих элементов и соотношений между ними.

Спектральный радиус симметрического случайного блуждания на группе G , дающий экспоненциальную асимптотику вероятности возвращения в единицу группы G, совпадает со спектральным радиусом переходного оператора, действующего в $l_2(G)$ по формуле

$$(Tf)(g) = \sum_{h \in G} p(g,h) f(h)$$

где $p(g,h)$ - вероятность перехода из g в h.

В случае свободной группы F_m с m образующими и равномерного распределения вероятностей на множестве образующих элементов и их обратных Г.Кестен [3] показал, что

$$\gamma = \frac{\sqrt{2m-1}}{m}$$

Трудная задача вычисления или получения оценок спектральных радиусов случайных блужданий имеет значительный теоретический и практический интерес.

В работе [3] Г.Кестен, в связи с предложенным им вероятностным подходом к решению неограниченной проблемы Бернсайда, поставил вопрос о поведении спектрального радиуса блуждания на группе при введении в нее соотношений. Задача состоит в следующем.

Пусть X - симметрическое случайное блуждание на группе G, спектральный радиус γ которого меньше I. При каких условиях на группу G и элемент $g \in G$ бесконечного порядка спектральный радиус индуцированного случайного блуждания на фактор группе, получающейся из G введением соотношения $g^n = e$ стремится к γ при $n \to \infty$?

Первый результат в этом направлении получил Кестен показав, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всяком $n > N$ введение соотношений $a_1^n = \ldots = a_m^n = e$ в свободную группу с образующими $a_1, \ldots, a_m$ увеличивает спектральный радиус не более чем на ε .

Исследование поставленной Кестеном проблемы показало, что указанный вопрос тесным образом связан с разрешимостью алгоритмической проблемы распознавания по произвольному слову $W(a_\gamma)$ в образующих элементах определяет ли оно единичный элемент в G или нет ? Если проблема тождества слов в группе после введения в нее соотношения решается каким-либо эффективным алгоритмом, например, алгоритмом Дэна, то в ряде случаев удается оценить спектральный радиус, и в частности, доказать его непрерывность при росте длины определяющего соотношения. Оказалось также, что аналитическая задача вычисления спектрального радиуса случайного блуждания на группе $G \simeq F_m/H$ сводится к некоторой комбинаторной задаче для группы H .

Цель диссертации состоит в том, чтобы предложить новый метод исследования асимптотического поведения случайных блужданий на однородных простанствах, применить этот метод для получения критерия аменабельности групп, заданных образующими элементами и определяющими соотношениями, а также исследовать поведение спектрального радиуса переходного оператора блуждания на группе при введении в нее соотношений.

Диссертация изложена на 132 страницах, состоит из введения и 4-х глав. Библиография содержит 23 наименования.

Во введении дается краткий обзор проблематики и результатов, связанных с предметом исследования, приводятся основные результаты диссертации и обсуждается методика исследования.

Первая глава диссертации, в которой подробно изучается случайное блуждание на свободной группе, носит, в основном, вспомогательный характер, а ее результаты используются в следующих главах.

Во второй главе введено понятие показателя роста подгруппы свободной группы, установлены свойства показателя роста и получена основная формула, выражающая спектральный радиус через показатель роста нормального делителя копредставления.

Третья глава посвящена доказательству непрерывности спектрального радиуса блуждания при введении в свободную группу длинных соотношений со слабым налеганием.

В главе 4 полученные результаты применяются к задачам существования инвариантных банаховых средних на полугруппах и однородных пространствах.

Перейдем к изложению основных результатов диссертации.

Пусть F_m - свободная группа, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_m$, μ - вероятностная мера, сосредоточенная на множестве $A = \{a_1, \ldots, a_m, a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}\}$, $\mu_i = \mu(a_i)$, $\mu_{-i} = \mu(a_i^{-1})$, $i = 1, \ldots, m$.

Предположим, что $x_1, x_2, \ldots$ - стационарная последовательность одинаково распределенных случайных величин со значениями в группе F_m и распределением μ. Обозначим через $\partial(g)$ длину элемента g группы F_m в образующих $a_1, \ldots, a_m$.

В§I главы I доказывается усиленный закон больших чисел для случайного блуждания на свободной группе.

ТЕОРЕМА I. С вероятностью I существует предел

$$\sqrt{}(F_m, \mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n} = 1 - 4\sum_{i=1}^{m} \mu_i \mu_{-i}$$

Доказательство теоремы I основано на использовании эргодической теоремы Г.Ферстенберга [8] и опирается на результаты Б.Я.Левита и С.А.Молчанова [IO] относящиеся к построению границы Мартина для случайного блуждания на свободной группе.

Условимся называть случайное блуждание на группе G , порожденной множеством $A=\{a_1,\dots,a_m,a_1^{-1},\dots,a_m^{-1}\}$ простым, если мера μ равномерно распределена на множестве A . Заметим, что исследование произвольных случайных блужданий сводится к рассмотрению простых.

В работе [II] Аве ввел понятие энтропии

$$h=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{g\in G}P_{e,g}^{(n)}\log P_{e,g}^{(n)}$$

случайного блуждания на группе G ($P_{e,g}^{(n)}$ - вероятность перехода за n шагов из единицы e группы G в элемент h). В § 2 с помощью теоремы I, вычилена энтропия простого случайного блуждания на свободной группе, а именно, показано, что

$$h=\frac{m-1}{m}\log(2m-1)$$

§ 3 посвящен вычислению переходных вероятностей $\mu_{g,h}^{(n)}$ простого блуждания на свободной группе. Доказано, что

$$\mu_{g,h}^{(n)}=\left(\frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\right)^{n+1}\frac{1}{(\sqrt{2m-1})^{s-1}}\left\{\binom{n}{\frac{n+s}{2}}-\frac{4(m-1)m}{2m-1}\sum_{t=1}^{\frac{n-s}{2}}\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{t}\binom{n}{\frac{n+s+2t}{2}}\right\}$$

если $\partial(g^{-1}h)=s\geq 1$ и

$$\mu_{g,h}^{(n)}=\left(\frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\right)^{n}\left\{\binom{n}{\frac{n}{2}}-2(m-1)\sum_{t=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{t}\binom{n}{\frac{n+2t}{2}}\right\}$$

если $\partial(g^{-1}h)=0$.

В § 4 исследуется асимптотика переходных вероятностей блуждания на свободной группе. Этот параграф носит вспомогательный характер, а его результаты используются в главе 2.

Перейдем к изложению результатов 2-ой главы.

Пусть свободная группа F_m транзитивно действует на множестве S , A – множество образующих элементов группы F_m и их обратных, μ – мера, сосредоточенная на множестве A . Определим марковскую цепь Y на множестве S , в которой переходы происходят в результате случайного действия элементов множества A . О марковской цепи Y будем говорить как о случайном блуждании на множестве S , построенном по мере μ . Заметим, что цепь Y инвариантна относительно действия группы F_m . Множество S естественным образом можно отождествить с множеством правых классов смежности группы F_m по некоторой подгруппе, являющейся стационарной для точки $\xi\in S$.

Спектральным радиусом случайного блуждания называется предел

$$\gamma=\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\mu^{(n)}_{\xi\xi}\}^{\frac{1}{n}}$$

где $\mu^{(n)}_{\xi\xi}$ – вероятность возвращения в точку ξ на n -ом шаге (γ не зависит от выбора точки ξ).

<u>Определение</u>. Показателем роста α_H группы $H\subset F_m$ называется предел

$$\alpha_H=\overline{\lim_{n\to\infty}}|H_n|^{\frac{1}{n}}$$

где H_n – множество элементов длины n в группе H , а $|H_n|$ – мощность множества H_n .

Величина α_H ограничена сверху константой $2m-1$, а в том случае, когда H - нормальный делитель

$$2m-1 \geqslant \alpha_H > \sqrt{2m-1}$$

Простейшие свойства показателя роста устанавливаются в § I.

Основным результатом главы 2 является

Теорема 2. Пусть τ - спектральный радиус простого блуждания на множестве $S = F_m/H$. Тогда

$$\tau = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2m-1}}{2m}\left(\dfrac{\alpha_H}{\sqrt{2m-1}} + \dfrac{\sqrt{2m-1}}{\alpha_H}\right) & \text{если} \quad \alpha_H > \sqrt{2m-1} \\ \dfrac{\sqrt{2m-1}}{m} & \text{если} \quad \alpha_H \leqslant \sqrt{2m-1} \end{cases}$$

В случае, когда H - нормальный делитель группы F_m используется только первая часть этой формулы, так как $\alpha_H > \sqrt{2m-1}$.

Важным следствием теоремы 2 служит то, что группа $G \simeq F_m/H$ аменабельна тогда и только тогда, когда $\alpha_H = 2m-1$.

В § 2 исследовано поведение показателя роста при счетных пересечениях и объединениях, направленных по включению последовательностей нормальных делителей свободной группы. В этом же параграфе вычислен показатель роста произвольной конечно порожденной подгруппы свободной группы.

§ 3 посвящен доказательству теоремы 2, а также доказательству следующего критерия возвратности блуждания: простое случайное блуждание на группе $G \simeq F_m/H$ возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|H_n|}{(2m-1)^n} = \infty$$

Критерии аменабельности группы $G \simeq F_m/H$, а также возвратности простого блуждания на ней, могут быть сформулированы в терминах производящей функции $H(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|H_n|x^n$ группы H, а именно, группа G аменабельна тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2m-1}$ - особая точка функции $H(x)$, а простое блуждание на этой группе возвратно в том и только том случае, когда .

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{2m-1}} H(x)=\infty$$

В § 3 также установлено, что производящая функция $u_\xi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{\xi\xi}^{(n)}x^n$ вероятностей возвращения в точку $\xi\in S$ и производящая функция ~~$H_\xi(x)$, где H_ξ - стационарная~~ группа точки ξ связаны соотношением

$$u_\xi(x)=R\left(x,\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}\right)H_\xi\left(\frac{m\left[1-\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}\right]}{(2m-1)x}\right)$$

где

$$R(x,y)=\frac{1}{y}\left[\frac{2m-1}{2m}-\frac{2m^2(m-1)(1-y)^2}{(2m-1)^2x^2-m^2(1-y)^2}\right]$$

§ 4 посвящен исследованию зависимости спектрального радиуса случайного блуждания на свободной группе с двумя образующими от переходных вероятностей. Доказано, что спектральный радиус τ симметрического случайного блуждания на группе F_2, построенного по мере μ, где $\mu(a_1)=\mu(a_1^{-1})=p$, $\mu(a_2)=\mu(a_2^{-1})=q$ и $p+q=\frac{1}{2}$, есть аналитическая функция параметра p.

В § 5 рассмотрены случайные блуждания на свободных произведениях циклических групп. Для таких блужданий найден алгоритм вычисления спектрального радиуса. В качестве примеров применения этого алгоритма рассмотрены простые блуждания на группах $\langle a,b\,|\,a^2=e\rangle$, $\langle a,b\,|\,a^3=b^3=e\rangle$, $\langle a,b\,|\,a^4=b^4=e\rangle$ и вычислены явные значения τ .

Перейдем к изложению результатов главы 3.

Пусть группа G задана представлением

$$G=\langle a_1,\dots,a_m \mid R_i(a_\mu)=e,\ \mu=1,\dots,m,\ i=1,2,\dots\rangle$$

т.е. набором образующих элементов $a_1,\dots,a_m$ и соотношений $R_i(a_\mu)=e$ между ними. Слова $R_i(a_\mu)$ называются определяющими словами. Через $=, \equiv, \cong$ мы будем соответственно обозначать равенство в группе G , равенство в свободной группе и графическое равенство. Проблема распознавания по произвольному слову из G определяет ли оно единичный элемент (или, что эквивалентно, определяют ли два слова один и тот же элемент) носит название проблемы тождества слов. Дэн предложил следующий алгоритм распознавания.

К данному слову W применяем до тех пор, пока это возможно, следующие две операции:

α) сокращение,

β) замену S на T , если $R_i \cong ST^{-1}$ и $\partial(S)>\partial(T)$.

Если этот процесс заканчивается пустым словом, то заключаем, что $W=e$. Если этот процесс заканчивается непустым словом, то заключаем, что $W\neq e$.

Известно, что проблема тождества слов разрешима не для всех конечно определенных групп. В предположении слабого налегания, определяющих слов М.Гриндлингер [5] , [6] доказал, что проблема тождества слов решается алгоритмом Дэна.

В главе 3 на базе результатов Гриндлингера доказана

Теорема 3. Пусть $\mathcal{C}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$ семейство конечно определенных групп G, множество M определяющих слов которых после замыкания относительно операций взятия обратного слова и циклических перестановок слова удовлетворяет следующему условию: если R_i и R_j не взаимно обратны, то при сокращении произведения $R_i R_j$ поглощается не более $\lambda<\frac{1}{6}$ букв слова R_j. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ и натурального N существует такое K, что если $G\in\mathcal{C}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$, $|M|<N$ и $\min\limits_i \partial(R_i(a_\mu))>K$, то

$$\left|r_G-\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\right|<\varepsilon$$

где r_G - спектральный радиус простого блуждания на группе G.

Следствие. Пусть $W_1,\ldots,W_n$ - набор несократимых слов в алфавите $A=\{a_1,\ldots,a_m,a_1^{-1},\ldots,a_m^{-1}\}$, удовлетворяющий условию: никакие два различных циклических сдвига слов из множества $\{W_j\}_{j=1}^n$ не есть степени одного и того же слова. Тогда спектральный радиус простого блуждания на группе

$$G=\langle a_1,\ldots,a_m \mid W_1^{l_1}=\ldots=W_n^{l_n}=e\rangle$$

стремится к $\sqrt{2m-1}/m$ при $l_1,\ldots,l_n\to\infty$.

Результаты главы 3 дают ответ на поставленный Кестеном вопрос о непрерывности спектрального радиуса при введении в свободную группу длинных соотношений.

В четвертой главе методы первых двух глав применяются к задаче о существовании инвариантного банахового среднего на полугруппах и однородных пространствах.

В § I построено транзитивное действие группы F_2 на множестве S, не обладающее инвариантным банаховым средним и такое, что каждая подгруппа группы F_2 действует на S не свободно. Этот пример показывает, что неаменабельность действия группы G на множестве S не влечет существование свободной подгруппы с двумя образующими в G, действующей на S свободно.

В § 2 обсуждается одно условие на действие группы G, при котором существует инвариантное банахово среднее ϕ такое, что $\phi(\chi_A)=1$, где A некоторое непустое подмножество S, а χ_A - характеристическая функция множества A. В [7] Гринлиф ставит вопрос об аменабельности группы, допускающей аменабельное действие. В этой связи в § 2 построен пример эффективного аменабельного действия неаменабельной группы.

В § 3 доказан критерий аменабельности полугруппы, заданной образующими элементами и определяющими соотношениями.

Для формулировки соответствующего результата фиксируем конечный алфавит $A=\{a_1,\dots,a_r\}$ и обозначим через $\mathcal{F}_A$ - свободную полугруппу с единицей e, порожденную множеством A. Пусть $K=\{W_j\}$ есть конечный или счетный набор слов в алфавите A, удовлетворяющий двум условиям:

1) никакое слово не есть часть другого,

2) начало любого слова не есть конец другого.

Обозначим через S_K полугруппу, порожденную соотношениями $W_j=e$, а также требованием, чтобы из равенства $xz=yz$ следовало равенство $x=y$ при любых $x,y,z\in S_K$. (закон правого сокращения). Пусть $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_r)$ - распределение вероятностей на A. Если $W_j=a_{j_1}\cdots a_{j_n}$, то через $\mu(W_j)$ обозначим произведение $\mu_{j_1}\cdots\mu_{j_n}$.

Теорема 4. Если существует распределение μ на A такое, что ряд

$$1-t+\sum_j \mu(w_j)t^{\partial(w_j)}$$

имеет кратный положительный корень в круге сходимости, то полугруппа S_k обладает правоинвариантным средним.

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на IУ-ом международном симпозиуме и УП-ой всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации, а также на научно-исследовательских семинарах механико-математического факультета МГУ и МИАН АН СССР.

Основные результаты диссертации изложены в работах [21], [22], [23].

Диссертант выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.М.Степину за помощь, внимание и поддержку в его работе.

ГЛАВА I

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ НА СВОБОДНОЙ ГРУППЕ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОБРАЗУЮЩИХ

§ I. Закон больших чисел на группе F_m

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – последовательность независимых вещественнозначных случайных величин с общей функций распределения $F(x)$. Рассмотрим сумму $X_1 + \cdots + X_n$. Классическая теория утверждает, что с вероятностью I

$$X_1 + \cdots + X_n \sim n \int x\, dF(x)$$

при условии, что конечен

$$\int |x|\, dF(x)$$

В этом параграфе мы докажем аналогичный результат для случая, когда X_i – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин, принимающих значения в группе F_m. Случай группы F_2 и равномерного распределения μ на множестве образующих a, a^{-1}, b, b^{-1} группы F_2 был рассмотрен Ферстенбергом в работе [13].

Прежде чем сформулировать и доказать теорему, определим необходимые понятия, которые нам в дальнейшем понадобятся.

Топологическое пространство T называется G – пространством, если группа G действует на T непрерывными преобразованиями.

Пусть x – случайная величина со значениями в группе G, а y – случайная величина, со значениями в пространстве T.

Предположим, что x и y независимы и имеют распределения μ и ν соответственно. Вероятностную меру, являющуюся распределением случайной величины xy будем обозначать $\mu*\nu$.

Меру $\mu*\nu$ можно определить также равенством

$$\int f(t)\,d\mu*\nu(t)=\iint f(gt)\,d\nu(t)\,d\mu(g),\quad t\in T,\ g\in G$$

где $f(t)$ произвольная непрерывная функция на T.
Вероятностная мера определенная на G - пространстве называется стационарной для меры μ если

$$\mu*\nu=\nu$$

Если B есть G - пространство, а ν - вероятностная мера на B, топология меры ν на $G\cup B$ определяется как слабейшая топология, для которой вложения $G\to G\cup B$, $B\to G\cup B$ есть гомеоморфизмы на образ и для которой отображение $G\cup B$ в множество $\mathcal{M}(B)$ вероятностных мер на B определенное следующим образом

$$g\longrightarrow g\nu,\quad \xi\longrightarrow\delta_\xi$$

непрерывно. (δ_ξ - мера сосредоточенная в точке ξ).

Пусть $\{x_n\}$ - последовательность независимых случайных величин, принимающих значение в группе G и имеющих одинаковое распределение μ.

Последовательность $\{z_n\}$ случайных величин, принимающая значения в G - пространстве, определенная вместе с последовательностью $\{x_n\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

а) z_k есть функция от $x_k, x_{k+1},\dots$

б) все z_k имеют одно и то же распределение

в) x_k независима от $z_{k+1}, z_{k+2},\dots$

г) $z_k = x_k z_{k+1}$

называется μ - процессом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. G пространство вместе со стационарной мерой ν образуют границу (G, μ), если ν есть распределение μ - процесса на B.

Пусть распределение μ сосредоточено на образующих $a_1, \ldots, a_m, a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}$ группы F_m. Обозначим, ради удобства, $a_{-1} = a_1^{-1}, \ldots, a_{-m} = a_m^{-1}$. Введем производящие функции

$$u_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_k^{(n)} z^n$$

где $f_k^{(n)}$ - вероятность первого попадания из единицы e в элемент a_k на n - ом шаге, $k = \pm 1, \ldots, \pm m$. Функции $u_k(z)$ удовлетворяют системе уравнений (с.м [10])

$$u_k(z) = z \sum_{j \neq k} \mu_j u_{-j}(z) u_k(z) + \mu_k z \tag{I.I}$$

$k = \pm 1, \ldots, \pm m$, $\mu_k = \mu(a_k)$.

Обозначим через $\{x_n\}$ стационарную последовательность одинаково распределенных случайных величин со значениями в группе F_m и распределением μ.

ТЕОРЕМА I.I. С вероятностью I

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{n} = \sum_{i=-m}^{m} \frac{1 - \tilde{u}_i}{\tilde{u}_{-i}^{-1} - \tilde{u}_i} (1 - 2\mu_i) \tag{I.2}$$

где $\tilde{u}_i = u_i(1)$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во первых, заметим, что величины $\tilde{u}_i$ конечны в силу невозвратности случайного блуждания на свободной группе. Обозначим через Ω_m пространство бесконечных слов $\omega = a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \ldots$ в символах a_i, не содержащих подслов вида $a_i a_{-i}$. Пространство Ω_m снабдим топологией покоординатной сходимости. Определим на Ω_m вероятностную меру ν следующим образом. Пусть $A_{i_1 \ldots i_n}$ обозначает цилиндрическое множество состоящее из тех последовательностей ω, которые начинаются со слова $a_{i_1} \ldots a_{i_n}$. Положим

$$\nu(A_{i_1 \ldots i_n}) = \frac{1 - \tilde{u}_{-i_n}}{\tilde{u}_{i_n}^{-1} - \tilde{u}_{-i_n}} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{u}_{i_k} \tag{I.3}$$

Определенная таким образом мера полукольца множеств $A_{i_1 \ldots i_n}$ может быть единственным образом продолжена на σ - алгебру порожденную цилиндрическими множествами пространства Ω_m. Проверим, что $\nu = \mu * \nu$. С этой целью установим равенство

$$\nu = \sum_{i=-m}^{m} \mu_{-i} a_i \nu$$

Имеем:

$$a_i \nu(A_{i_1 \ldots i_n}) = \nu(a_i A_{i_1 \ldots i_n}) = \begin{cases} \nu(A_{i i_1 \ldots i_n}) & \text{если} \quad i \neq -i_1 \\ \nu(A_{i_2 \ldots i_n}) & \text{если} \quad i = -i_1 \end{cases}$$

Следовательно

$$a_i \nu(A_{i_1 \ldots i_n}) = \begin{cases} \tilde{u}_i \dfrac{1 - \tilde{u}_{-i_n}}{\tilde{u}_{i_n}^{-1} - \tilde{u}_{-i_n}} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \tilde{u}_{i_k} & \text{если} \quad i \neq -i_1 \\ \dfrac{1}{\tilde{u}_{-i}} \dfrac{1 - \tilde{u}_{-i_n}}{\tilde{u}_{i_n}^{-1} - \tilde{u}_{-i_n}} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \tilde{u}_{i_k} & \text{если} \quad i = -i_1 \end{cases} \tag{I.4}$$

$$\sum_{i=-m}^{m} \mu_{-i} a_i \nu(A_{i_1 \ldots i_n}) = \frac{1 - \tilde{u}_{-i_n}}{\tilde{u}_{i_n}^{-1} - \tilde{u}_{-i_n}} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{u}_{i_k} \Big[\sum_{i \neq -i_1} \mu_{-i} \tilde{u}_i + \frac{\mu_{i_1}}{\tilde{u}_{i_1}} \Big] =$$

$$= \frac{1-\tilde{u}_{-i_n}}{\tilde{u}_{i_n}^{-1}-\tilde{u}_{-i_n}} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{u}_{i_k} \frac{\sum_{i\neq -i_1} \mu_{-i}\tilde{u}_i\tilde{u}_{i_1}+\mu_{i_1}}{\tilde{u}_{i_1}} = \nu(A_{i_1}\cdots i_n)$$

в силу равенства (I.3). Итак, нами доказано, что мера ν является стационарной для меры μ.

Из соотношений (I.4) вытекает, что

$$\frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega) = \begin{cases} \tilde{u}_i & \text{если } i\neq -i_1 \\ \tilde{u}_{-i}^{-1} & \text{если } i=-i_1 \end{cases} \qquad (I.5)$$

а $\omega = a_{i_1}a_{i_2}\cdots$. (I.5) можно записать также в следующем виде

$$\frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega) = \begin{cases} \tilde{u}_i^{\partial(a_ig_n)-\partial(g_n)} & \text{если } i\neq -i_1 \\ \tilde{u}_{-i}^{\partial(a_ig_n)-\partial(g_n)} & \text{если } i=-i_1 \end{cases}$$

где $g_n\to\omega$ в смысле естественной сходимости на $F_m \cup \Omega_m$. Следовательно,

$$\partial(a_ig_n)-\partial(g_n) \xrightarrow[g_n\to\omega]{} \begin{cases} \log\frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega)/\log\tilde{u}_i & \text{если } i\neq -i_1 \\ \log\frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega)/\log\tilde{u}_{-i} & \text{если } i=-i_1 \end{cases}$$

Предположим теперь, что $\{x_n\}$ – последовательность независимых случайных величин со значениями в группе F_m имеющих одно и то же распределение μ. Тогда

$$\frac{\partial(x_1\cdots x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\partial(x_ix_{i+1}\cdots x_n)-\partial(x_{i+1}\cdots x_n)\}$$

Так как при каждом i

$$\partial(x_ix_{i+1}\cdots x_n)-\partial(x_{i+1}\cdots x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \log\frac{dx_i\nu}{d\nu}(z_{i+1})/\log u(x_i, z_{i+1})$$

где

$$u_i(a_i,\omega) = \begin{cases} \tilde{u}_i & \text{если } i\neq -i_1 \\ \tilde{u}_{-i} & \text{если } i=-i_1 \end{cases} \qquad \omega = a_{i_1}a_{i_2}\cdots$$

то из эргодической теоремы Ферстенберга [8] следует, что

$$\frac{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{dx_i\nu}{d\nu}(z_{i+1}) / \log u(x_i, z_{i+1}) =$$

$$= \int_{F_m}\int_{\Omega_m} \log \frac{dg\nu}{d\nu}(\omega) / \log u(g,\omega)\, d\mu(g)\, d\nu(\omega) \qquad (1.6)$$

где

$$u(g,\omega) = \begin{cases} 2 & \text{если} \quad \partial(g) > 1 \\ \tilde{u}_i & \text{если} \quad g = a_i, \quad i \neq -i_1 \\ \tilde{u}_{-i} & \text{если} \quad g = a_{-i_1} \end{cases}$$

Заметим, что эргодическая теорема применима, ибо стационарная мера ν для μ в этом случае единственна [13].

Вычислим интеграл (I.6)

$$\int_{F_m}\int_{\Omega_m} \log \frac{dg\nu}{d\nu}(\omega)/\log u(g,\omega)\, d\mu(g)\, d\nu(\omega) = \sum_{i=-m}^{m} \mu_i \int_{\Omega_m} \log \frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega)/\log u(a_i,\omega)\, d\nu(\omega) =$$

$$= \sum_{i=-m}^{m} \mu_i \left[\sum_{j\neq -i} \frac{1}{\log \tilde{u}_i} \int_{\Omega_m^j} \log \frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega)\, d\nu(\omega) + \frac{1}{\log \tilde{u}_{-i}} \int_{\Omega_m^{-i}} \log \frac{da_i\nu}{d\nu}(\omega)\, d\nu(\omega) \right] =$$

(Ω_m^j - множество тех последовательностей, которые начинаются символом a_j)

$$= \sum_{i=-m}^{m} \mu_i \left[\sum_{j\neq -i} \frac{1-\tilde{u}_{-j}}{\tilde{u}_j^{-1} - \tilde{u}_{-j}} - \frac{1-\tilde{u}_i}{\tilde{u}_{-i}^{-1} - \tilde{u}_i} \right] = \sum_{i=-m}^{m} \frac{1-\tilde{u}_i}{\tilde{u}_{-i}^{-1} - \tilde{u}_i} (1 - 2\mu_i)$$

Теорема доказана.

Обозначим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n}$ через $\nu(F_m, \mu)$.

ТЕОРЕМА I.2.

$$\nu(F_m, \mu) = 1 - 4\sum_{i=-m}^{m} \mu_i \mu_{-i}$$

Доказательство. Введем случайные величины φ_k, $k=0,1,2,\dots$, принимающие значения $-I$, $+I$, и такие, что

$$\varphi_k = \begin{cases} I, \text{ если } x_1 x_2 \cdots x_{k-1} = e \\ I, \text{ если } x_1 x_2 \cdots x_{k-1} \neq e \text{ и } x_{k-1} x_k \neq e \\ -I, \text{ если } x_1 x_2 \cdots x_{k-1} \neq e \text{ и } x_{k-1} x_k = e \end{cases}$$

Очевидно, что для величин φ_k имеет место соотношение

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k$$

где Δ_n - случайная величина, определенная равенством

$$\Delta_n = \partial(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

Вычислим математическое ожидание $E_\mu \varphi_k$ величины φ_k. Имеем

$$E_\mu \varphi_k = P_\mu\{x_1 x_2 \cdots x_{k-1} = e\} + P_\mu\{x_1 x_2 \cdots x_{k-1} \neq e,\ x_{k-1} x_k \neq e\} -$$

$$- P_\mu\{x_1 x_2 \cdots x_{k-1} \neq e,\ x_{k-1} x_k = e\}$$

Так как $P_\mu\{x_1 x_2 \cdots x_{k-1} = e\} = \mu_{e,e}^{(k-1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, то

$$E_\mu \varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} P_\mu\{x_{k-1} x_k \neq e\} - P_\mu\{x_{k-1} x_k = e\} = 1 - 2 P_\mu\{x_1 x_2 = e\} =$$

$$= 1 - 4 \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mu_{-i}$$

Следовательно,

$$\nu(F_m, \mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{E_\mu \Delta_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} E_\mu \varphi_k}{n} = 1 - 4 \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mu_{-i}$$

Теорема доказана.

§ 2. Энтропия процесса (F_m, μ).

В работе [II] Авес ввел понятие энтропии процесса Маркова (G, μ), где G - счетная группа, μ - мера на G с конечным носителем $supp(\mu)$, порождающим группу G. По определению

$$h(G,\mu) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{g\in G} \mu_{e,g}^{(n)} \log \mu_{e,g}^{(n)} \tag{2.I}$$

где $\mu_{e,g}^{(n)}$ - вероятность перехода за n шагов из состояния e в состояние g при случайном блуждании на группе G, построенном по мере μ. Оказывается, что предел справа в (2.I) существует и в случае симметрической меры

$$-2\log \lambda(G,\mu) \le h(G,\mu) \le \log \gamma$$

где $\lambda(G,\mu)$ - спектральный радиус случайного блуждания на G, построенного по мере μ, а

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} |[supp(\mu)]^n|^{\frac{1}{n}}$$

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть мера μ равномерно распределена на элементах $a_1, \dots, a_m, a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}$ группы F_m. Тогда

$$h(F_m,\mu) = \frac{m-1}{m} \log(2m-1) \tag{2.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ЛЕММА 2.I. Обозначим через E_n множество элементов