Note Title 7/1/2015

The Triangle Inequality for ℓ_2

Theorem 3.4 (Minkowski's Inequality for ℓ_2)

If $x, y \in \ell_2$, then $x + y \in \ell_2$, and

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 .$$

Proof

From the Cauchy - Schwarz Inequality we have:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

C.S.

$$\leq \|x\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$= \left(\|x\|_2 + \|y\|_2 \right)^2$$

Take $n \to \infty$ to see

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \leq \left(\|x\|_2 + \|y\|_2 \right)^2$$

We see that

$$\|x+y\|_2^2 \le \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2 . \qquad \square$$